Математиката в света около мен

Неперово число „e“

Математиката е навсякъде около нас. Както е казал известният британски физик от миналия век Paul Dirac – “God used beautiful mathematics in creating the world”, което в превод означава „Бог е използвал красивата математика когато е създавал света“. Математиката е основоположна за всички природни науки, чрез математиката се намират най-елегантните решения на най-сложните проблеми.

Нека да се запознаем с един от тях от близо. Ето и условието:

Потребител има един лев на банкова сметка с годишна лихва 100%. Условието на банката е, че могат да олихвяват на половин година с 50%, на 3 месеца с лихва 25%, на 1 месец с лихва $\frac{1}{12}$ и така нататък до колкото малки периоди от време си пожелае. Коя е максималната сума, която може човекът да има след последното олихвяване за годината?

Да разгледаме първия случай, тоест при олихвяване на 100% – 1 път в годината. Можем да си съставим простата формула $C_1 = C_0(1 + l)$, където C_1 е нарасналата сума, C_0 е началната сума, а l е лихвеният процент или лихвената част. Тогава $C_1 = 1\left(1 + \frac{100}{100}\right) = 1(2) = 2$, следователно $C_1 = 2$. Нека разгледаме вторият случай при, който олихвяваме 2 пъти на 50%. Отново съставяме формула, която изглежда така $C_1 = C_0(1 + l)^t$, където C_1 е нарасналата сума, C_0 е началната сума, l е лихвеният процент или лихвената част, а t е броят на олихвяванията. Тогава $C_1 = 1\left(1 + \frac{50}{100}\right)^2 = 1(1{,}5)^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$, следователно $C_1 = 2{,}25$, което означава, че така увеличаваме нарасналата сума (спрямо простото олихвяване веднъж в годината) с $0{,}25$. Да разгледаме и третият случай при, който олихвяваме 4 пъти на 25%. Използваме същата формула, която изглежда така $C_1 = C_0(1 + l)^t$, където C_1 е нарасналата сума, C_0 е началната сума, l е лихвеният процент или лихвената част, а t е броят на олихвяванията. Тогава $C_1 =$
$= 1\left(1 + \frac{25}{100}\right)^4 = 1(1{,}25)^4 = 1{,}25^4 = 2{,}44$, следователно $C_1 = 2{,}44$, което означава, че така увеличаваме нарасналата сума (спрямо простото олихвяване веднъж в годината) с $0{,}44$. Установяваме, че с увеличаване на броят на олихвяванията увеличаваме и нарасналата сума спрямо простото олихвяване веднъж в годината. Но дали тази сума ще расте толкова бързо ако увеличим още повече олихвяванията. Нека да проверим случая при, който олихвяванията са 12 с лихвена част $\frac{1}{12}$. Използваме същата формула, която изглежда така $C_1 = C_0(1 + l)^t$, където C_1 е нарасналата сума, C_0 е началната сума, l е лихвеният процент или лихвената част, а t е броят на олихвяванията. Тогава
$C_1 = 1\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 1\left(1\frac{1}{12}\right)^{12} = \left(1\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61$, следователно $C_1 \approx 2{,}61$, което означава, че така увеличаваме нарасналата сума (спрямо простото олихвяване веднъж в годината) с $0{,}61$. Сумата още се увеличава. Нека пробваме ако сумата се олихвява 365 пъти (тоест всеки ден) в годината с лихвена част $\frac{1}{365}$. Използваме същата формула, която изглежда така $C_1 = C_0(1 + l)^t$, където C_1 е нарасналата сума, C_0 е началната сума, l е лихвеният процент или лихвената част, а t е броят на олихвяванията. Тогава
$C_1 = 1\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 1\left(1\frac{1}{365}\right)^{365} = \left(1\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}71$, следователно $C_1 \approx 2{,}71$, което означава, че така увеличаваме нарасналата сума (спрямо простото олихвяване веднъж в годината) с $0{,}71$. Можем ли да постигнем по високо увеличаване? Нека проверим случая в, който олихвяванията са 8760 (тоест всеки час) в годината, а лихвената част е $\frac{1}{8760}$. Използваме същата формула, която изглежда така
$C_1 = C_0(1 + l)^t$, където C_1 е нарасналата сума, C_0 е началната сума, l е лихвеният процент или лихвената

част, а t е броят на олихвяванията. Тогава $C_1 = 1\left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760} == 1\left(1\frac{1}{8760}\right)^{8760} = \left(1\frac{1}{8760}\right)^{8760} \approx 2{,}72$, следователно $C_1 \approx 2{,}72$, което означава, че така увеличаваме нарасналата сума (спрямо простото олихвяване веднъж в годината) с $0{,}72$. Все още има увеличение. Нека проверим един последен случай при, който олихвяванията са 525 600 (тоест всяка минута) в годината. Използваме същата формула, която изглежда така $C_1 = C_0(1 + l)^t$, където C_1 е нарасналата сума, C_0 е началната сума, l е лихвеният процент или лихвената част, а t е броят на олихвяванията. Тогава

$C_1 = 1\left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600} = 1\left(1\frac{1}{525600}\right)^{525600} = \left(1\frac{1}{525600}\right)^{525600} \approx 2{,}72$, следователно $C_1 \approx 2{,}72$, което означава, че така увеличаваме нарасналата сума (спрямо простото олихвяване веднъж в годината) с $0{,}72$. Защо увеличението спря? За да разберем нека разгледаме още десетични символи от двете стойности – при олихвяването на всеки час $C_1 \approx 2.7145674820218743031938863066851$, а при олихвяването на всяка минута $C_1 \approx 2.7182792425790150990097906606541$

Когато разгледаме знаците след десетичната запетая установяваме, че всъщност увеличение има, но то е пренебрежимо малко. Какво ли ще стане ако олихвяваме безкраен брой пъти а лихвената част е $\frac{1}{\infty}$ (безкрайно малка)? Разбира се безкрайността не е число и не можем да направим никакви пресмятания и тук добрата стара алгебра не ни помага особено, но колкото и да е голямо едно число когато вземем неговото реципрочно то винаги ще е по-голямо от нула, защото знаем, че единственият случай когато нула може да е частно е когато делим нея на число принадлежащо на множеството на реалните числа ($x \in \mathbb{R}$). Ще използваме една идея за безкрайността на немският математик George Cantor. Нека имаме едно число означено така $\aleph_0$, това число се нарича Aleph naught. Какво представлява $\aleph_0$? Ами нека си представим числовата ос там са познатите ни числа – 1, 2, 3, 4 и т.н., а сега нека си представим една друга числова ос, която е продължение на тази, но има няколко особености. Първо – тази ос започва с числото $\aleph_0$ и второ – колкото и да продължаваме познатата ни ос (която започва с 1, 2, 3, 4 и т.н.) никога няма да достигнем оста започваща с $\aleph_0$. Тоест $\aleph_0$ е най – малкото безкрайно число. Сега нека опитаме с формулата $C_1 = C_0(1 + l)^t$.Тогава $C_1 = C_0\left(1 + \frac{1}{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}$

Пак не можем да използваме алгебрата и да направим изчисления, но има нещо много по умно за, което се е сетил швейцарският математик Jacob Bernoulli преди около 300 години. Става въпрос за функция, която изглежда така $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, където n расте до $\aleph_0$. Следователно границата на тази функция е стойността, която търсим. А тя е равна на $\lim_{n \to \aleph_0}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (двете граници са ≈ равни заради числовите диапазони /разликата е пренебрежимо малка/)а тази стойност Jacob Bernoulli нарича неперово число в чест на Джон Непер, който е изобретателя на логаритмите, а символът на тази константа е e в чест на шведският математик Leonhard Euler. Числото e е също ирационално като π. Първите петдесет символа след десетичната запетая на e са
$e \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999 5$

Както може би забелязвате шестата стойност (когато олихвяваме всяка минута), която получихме е идентична до третият знак след десетичната запетая, ако олихвяваме на всяка секунда стойностите ще са идентични до шестият знак след десетичната запетая. Колкото повече пъти олихвяваме сумата толкова повече се доближаваме до стойността на e. А всъщност и това е решението на проблема, който разглеждахме.

Невероятно нали как се завъртяхме около няколко теореми и следствия и стигнахме до решение на проблема. Математиката не е просто наука, тя е различна от другите науки, тя е навсякъде около нас и вътре в нас. Математиката може да е начин на живот на някои хора, които изберат този път.

Димитър Илиев Дамянов 7[в] клас

ОУ„Иван Вазов“- гр.Смолян